О. В. Глазырина, М. Ф. Павлова

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

glazyrina-olga@ya.ru, mpavlova@kpfu.ru

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЗАДАЧИ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Пусть Ω — ограниченная область R^n, Γ — граница Ω, $Q_T = \Omega \times (0,T)$. В области Q_T рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x,u)k_i(x,\nabla u, Bu)) = f, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad x \in \Omega, \qquad u\,|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где B — оператор вида $Bu(t) = \int\limits_\Omega g(x)\,u(x,t)\,dx$, g — известная функция.

Уравнения вида (1) возникают, например, при математическом описании диффузии популяции бактерий, когда предполагается, что скорость распространения в точке определяется глобальным состоянием среды (см., например, [1]).

Будем предполагать, что $a_i(x,\xi_0)$ и $k_i(x,\xi,\nu)$, $(i = 1,\dots,n)$, непрерывны по ξ_0, ν и ξ, измеримы по аргументу x и удовлетворяют условиям, обеспечивающим ограниченность, коэрцитивность и монотонность по градиенту оператора

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(a_i(x,u)k_i(x,\nabla u, Bu)),$$

действующего из $\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ в $W^{-1}_{p'}(\Omega)$, $1/p + 1/p' = 1$.

Обобщенное решение задачи (1)–(2) определяется соотношениями

$$u \in L_p(0,T;\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)) \bigcap L_\infty(0,T;L_2(\Omega)),$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{п. вс. в} \quad \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \in L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega))$$

и уравнением (1), понимаемым как равенство элементов в пространстве $L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega))$.

В работе [2] доказано существование обобщенного решения задачи (1) – (2) при $f \in L_{p'}(0,T;W_{p'}^{-1}(\Omega))$, $u_0 \in L_2(\Omega) \bigcap \overset{\circ}{W}{}_p^1$ (Ω). В [3] доказана теорема единственности при условии, что L — сильно монотонный оператор и при дополнительных предположениях на коэффициенты уравнения (1) и оператор B.

Также для задачи (1)–(2) в случае, когда Ω — n-мерный параллелепипед, исследованы неявная и явная разностные схемы. Доказана сходимость этих разностных схем при минимальных условиях на гладкость исходных данных. Для явной разностной схемы теорема о сходимости справедлива в предположении, что

$$\tau \leqslant c\,\frac{h^2}{4n^{2/p}}, \quad 1 < p < 2; \qquad \tau \leqslant c\,\frac{h^{p+n(p-2)/2}}{2^p n}, \quad p \geqslant 2;$$

и

$$\tau\frac{n}{h^{p+n(p-2)/2}} \to 0, \ \text{если} \ \ p \geqslant 2; \qquad \tau\frac{n^{2/p}}{h^2} \to 0, \ \text{если} \ 1 < p < 2;$$

при $\tau, h \to 0$. Здесь τ — шаг по t, $h = \min\limits_{1 \geqslant i \geqslant n} h_i$, h_i — шаг по оси x_i.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №№ 12-01-00955, 12-01-97022, 12-01-31515).

ЛИТЕРАТУРА

1. Chipot M., Molinet L. *Asymptotic behavior of some nonlocal diffusion problems* // Applicable Analysis. – 2001. – V. 80. – № 3/4.

2. Павлова М. Ф. *О разрешимости нелокальных нестационарных задач с двойным вырождением* // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 8. – С. 1148–1162.

3. Глазырина О. В., Павлова М. Ф. *О единственности решения одной нелокальной нелинейной задачи с сильно монотонным по градиенту пространственным оператором* // Изв. вузов. Математика. – 2012. – № 3. – С. 92–95.

А. П. Гогин, М. М. Карчевский

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

alexg@list.ru, Mikhail.Karchevsky@kpfu.ru

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА СМЕШАННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается задача Дирихле для квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка дивергентного вида

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \tag{2}$$

где $\Omega \subset R^2$ — ограниченная многоугольная область, Γ — граница области Ω, $a(x, \eta) = (a_1(x, \eta),\ a_2(x, \eta))$, $a_0(x, \eta)$ — заданные функции, непрерывные при $\bar\eta = (\eta_0, \eta) \in R^3$, для всех $x \in \Omega$.